

Umsetzungsbeispiel Mathematische Simulationen

Beschreibung des Artefakts

Mathematische Simulationen sind interaktive und meist dynamische Darstellungen mathematischer Sachverhalte, bei denen Funktionen, geometrische Figuren oder statistische Modelle in Abhängigkeit von veränderlichen Parametern gezeigt werden. Durch zum Beispiel Schieberegler können die SuS mathematische Zusammenhänge verändern und beobachten. Im Vergleich zu statischen Darstellungsformen ermöglichen diese Simulationen, dass sich mathematische Objekte dynamisch anpassen. Dadurch werden Abhängigkeiten, Veränderungen und funktionale Beziehungen besonders veranschaulicht.

Beschreibung des Szenarios

Die SuS lernen die Sinusfunktion und ihre Parameterdarstellung kennen und versuchen sich zu Beginn die Eigenschaften der Sinusfunktion in Partnerarbeit zu erarbeiten. Danach erklärt der Lehrende den Schüler: innen die Simulation durch GeoGebra und stellt diese als Hilfsmittel zur Verfügung, um sich (wieder in Partnerarbeit) die Wirkung der Parameter auf die Eigenschaften zu erarbeiten. Darauf folgt eine weitere Arbeitsphase, in der die Lernenden sich die Wirkung der Parameter mithilfe der Simulation erschließen. Danach kommt es zum Unterrichtsgespräch, bei dem die SuS ihre Ergebnisse vorstellen und die Arbeit mit dem digitalen Artefakt reflektieren und mit dem Arbeiten ohne Hilfsmittel vergleichen.

Basisangaben

Fach	Mathematik	Klassenstufe	10		
Schulform	Gymnasium	Lernbereich	1		
Zeitbedarf	90 Minuten	Kompetenzrahmen	3.1 6.1	5.2	5.5

Artefaktsteckbrief Mathematische Simulationen

Wofür wird es genutzt?

Mathematische Simulationen werden genutzt, um mathematische Objekte digital zu veranschaulichen. Dadurch werden Zusammenhänge, welche durch Abstraktion oder statische Darstellungen nur schwer zugänglich sind, schnell sichtbar und viel leichter untersuchbar. Ihre Nutzung lässt sich in Bereiche gliedern.

1. **Veranschaulichung mathematischer Konzepte:** Funktionen, Funktionsscharen, geometrische Transformationen und vieles mehr können durch Simulationen visualisiert werden und dadurch leichter interpretiert werden.
2. **Untersuchung von Abhängigkeiten:** Analyse von Parameterwirkungen durch systematische Veränderung dieser Parameter
3. **Entdeckendes Arbeiten:** unmittelbares Prüfen von Hypothesen durch Eingabe der Werte in Simulation
4. **Überprüfen mathematischer Ergebnisse:** durch Eingabe rechnerischer Ergebnisse ist dann an der Simulation meist erkennbar ob diese Ergebnisse korrekt sind oder nicht

Wie funktioniert es?

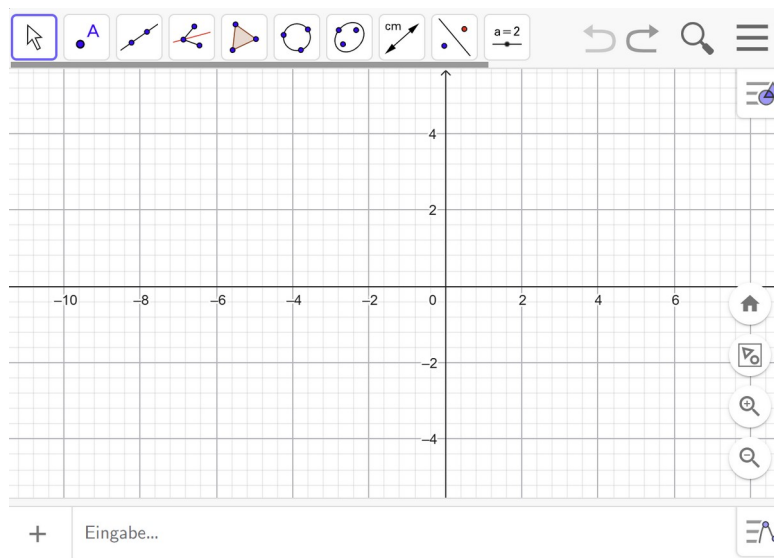


Abbildung 1: Benutzeroberfläche - GeoGebra

Mathematische Simulationen wie zum Beispiel in dem Programm GeoGebra veranschaulichen mathematische Objekte, indem sie diese 2-dimensional abbilden.

Koordinatensystem. In die Eingabe kann man einen beliebigen Funktionsterm angeben, welchen das Programm dann darstellt.

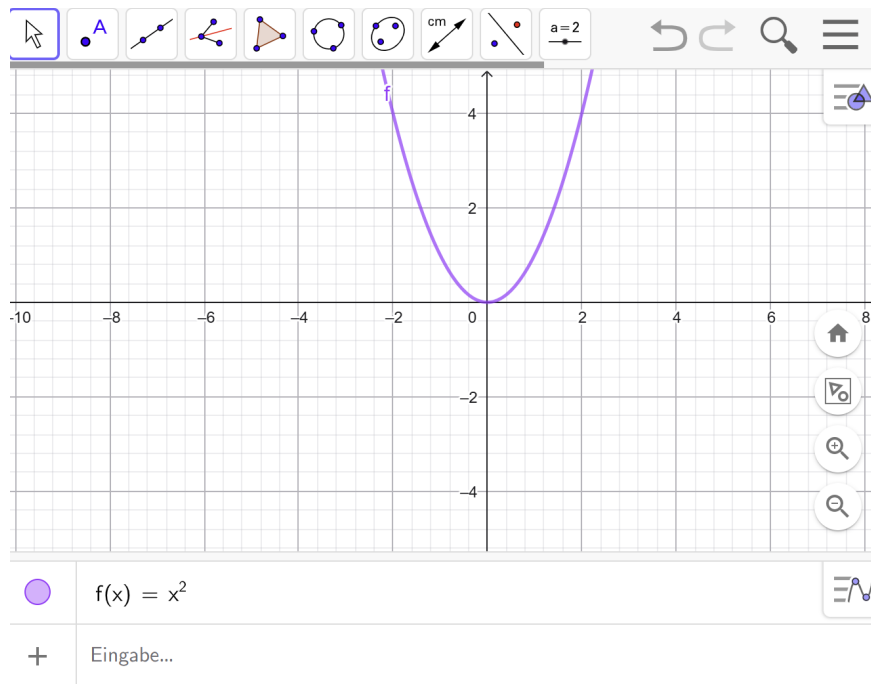


Abbildung 2: Beispiel – Eingabe eines Funktionsterms

Dazu gibt es allerdings noch weitere Anwendungsmöglichkeiten. In der oberen Leiste kann man verschiedene Aktionen auswählen. Es ist zum Beispiel möglich Punkte in das Koordinatensystem zu setzen. Dabei zeigt das Programm dann die Koordinaten des Punktes an. Es ist auch möglich die Koordinaten anzugeben und GeoGebra setzt dann den Punkt. Eine weitere Aktion, welche das Programm zur Verfügung stellt, ist, dass man zwei Punkte angibt und GeoGebra dann eine Gerade, welche beide Punkte beinhaltet abbildet und deren Term angibt.

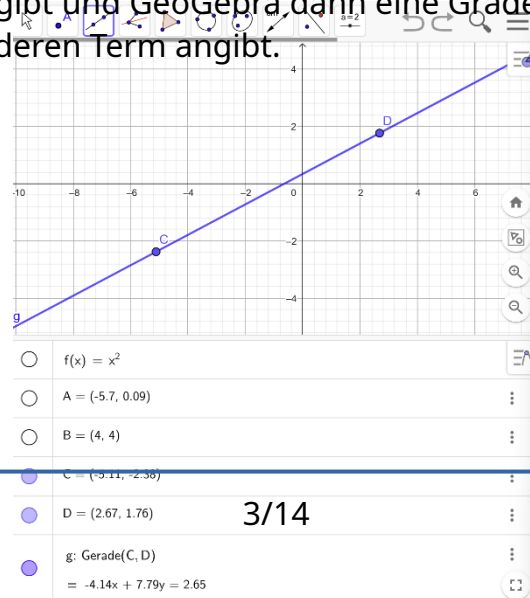


Abbildung 3: Beispiel – Abbildung einer linearen Gleichung

Des Weiteren ist es möglich sich die Winkelhalbierende von zwei sich schneidenden Funktionen ausgeben zu lassen, indem man diese anwählt. Auch eine senkrechte- und eine parallele Gerade kann GeoGebra ausgeben, wenn man eine bestehende Gerade auswählt.

Außerdem kann man zum Beispiel die Eckpunkte einer geometrischen Figur in ein Koordinatensystem eingeben und das Programm zeigt dann die entsprechende Figur. Dabei werden auch die Seitenlängen von GeoGebra angegeben.

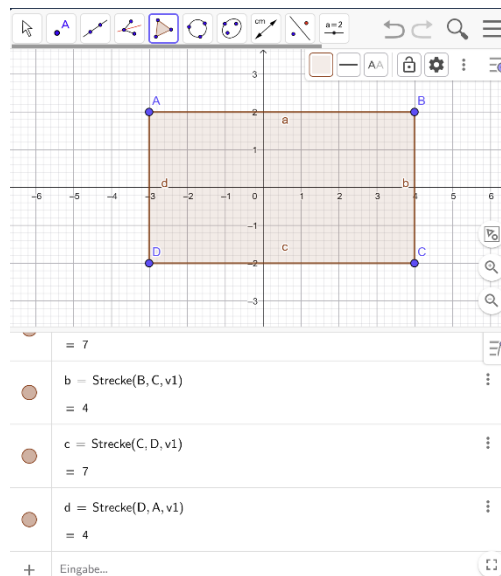


Abbildung 4: Beispiel – geometrische Figur

Unter einem weiteren Reiter ist es möglich Kreise über verschiedene Möglichkeiten zu erstellen. Dabei zum Beispiel durch Angabe von Mittelpunkt und Radius oder auch durch Angabe von drei Punkten auf dem Kreis.

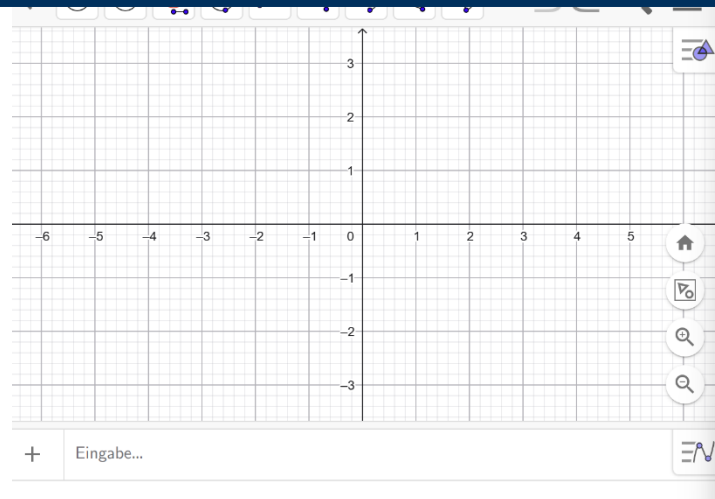


Abbildung 5: Beispiel – Erstellen von Kreisen

Unter dem nächsten Reiter ist es möglich Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln zu erstellen.

Ellipse: Angabe von zwei Brennpunkten und einem Punkt auf der Ellipse

Hyperbel: Angabe von zwei Brennpunkten und einem Punkt auf der Hyperbel

Parabel: Angabe eines Brennpunktes und einer Leitlinie.

Dazu kann man sich mit dem Programm verschiedene Werte im Bezug auf mathematische Objekte ausgeben lassen.

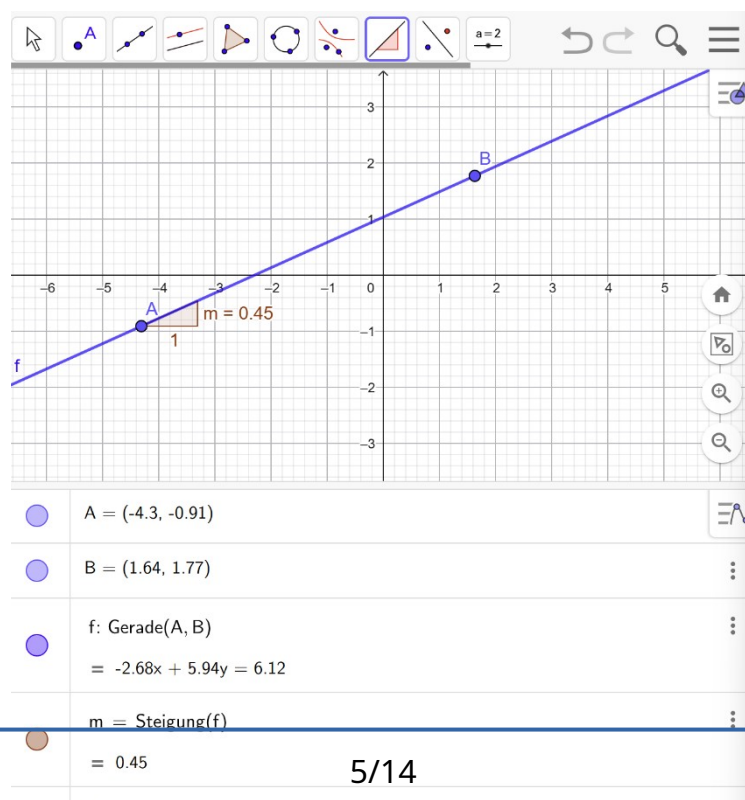


Abbildung 6: Beispiel – Ausgabe der Steigung einer linearen Gleichung

Man hat ebenfalls die Möglichkeit Objekte zu Spiegeln, indem man eine Gerade als Spiegelachse angibt.

Man kann auch Vektoren erzeugen, indem man einen Start- und Endpunkt angibt

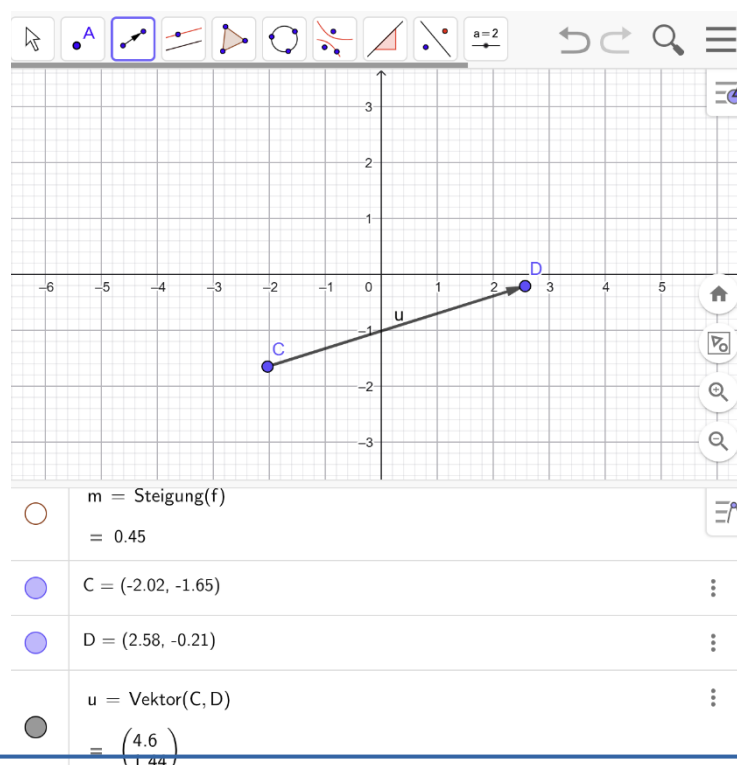


Abbildung 7: Beispiel – Ausgabe eines Vektors

Eine weitere sehr wichtige Funktion des Artefakts ist die Eingabe von Parametern. Somit ist es möglich einen Funktionsterm als Parameterdarstellung einzugeben und diese Parameter dann dynamisch mit Schiebereglern zu verändern.

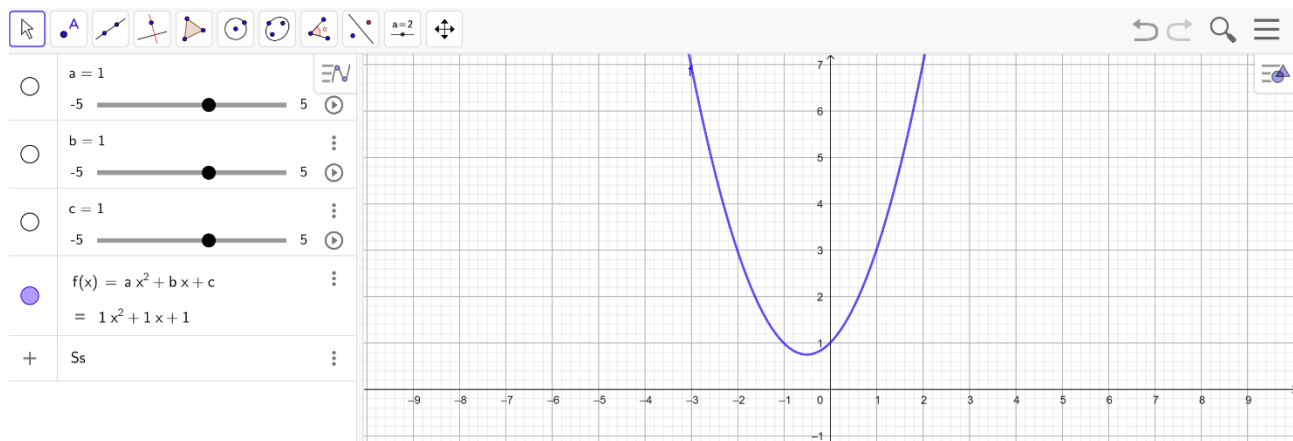


Abbildung 8: Beispiel – Eingabe einer Funktion in Parameterdarstellung

Umsetzung im Unterricht

Technisch-/ infrastrukturelle Voraussetzungen

Jeder der Lernenden benötigt einen Computer, einen Laptop oder ein Tablet, auf dem GeoGebra installiert ist oder mit dem sie auf GeoGebra via Internet zugreifen können. Zusätzlich wird ein Beamer (oder ein großer Bildschirm/interaktive Tafel) benötigt, um den Bildschirm der Lehrperson zu übertragen und den Bildschirm einzelner Schüler zu spiegeln.

Curriculare Analyse

Lehrplan

Für die vorgestellte Stunde wird nur Vorwissen aus der Mathematik vorausgesetzt. Die SuS sollten mit den Eigenschaften einer Funktion (Definitionsbereich, Wertebereich, ...) bereits vertraut sein. Auch das sich diese Eigenschaften durch Parameter verändern lassen, sollte schon bekannt sein. Dieses Vorwissen wird im Lernbereich 1 der Klassenstufe 9 eingeführt. Dabei wird zwar nicht auf die Sinusfunktion, sondern auf die Potenz- und Wurfelfunktion eingegangen, aber dieses Verständnis sollten sie auch auf andere Funktionen anwenden können.

Es wird nicht erwartet, dass die Lernenden bereits mit dem Programm vertraut sind, deshalb erläutert der Lehrende die Funktionen des Tools, welches für die Aufgabe notwendig ist.

Die Unterrichtsstunde soll an das Wissen aus dem Lernbereich 1 der Klassenstufe 9 anknüpfen und bietet einen Einstieg zur Sinusfunktion im Lernbereich 1 („Wachstumsvorgänge und periodische Vorgänge“) der Klassenstufe 10. Dabei wird auf die Parameterdarstellung und deren Auswirkungen auf die Eigenschaften der Funktion eingegangen. Dadurch sind sie danach fähig die Sinusfunktion über die Parameter anzupassen und somit auf periodische Vorgänge anzuwenden, was die Lernzielebene des Lehrplans zu diesem Thema auch besagt.

Eine Möglichkeit zur Anknüpfung an die Unterrichtsstunde ist die Einführung von gedämpften Schwingungen, denn diese Dämpfung wird durch die Auswirkung der Parameter erklärt. Außerdem wird die Sinusfunktion auch als Visualisierung periodischer Vorgänge eingeführt, wodurch sich diese Anknüpfung noch mehr anbietet.

Lernbereich 1: Wachstumsvorgänge und periodische Vorgänge

22 Ustd.

Einblick gewinnen in verschiedene Wachstums- und Zerfallsprozesse

Übertragen der Kenntnisse zu Exponentialfunktionen auf Wachstumsvorgänge

- rekursive Beschreibung
- explizite Beschreibung durch Exponentialfunktionen
 - Eigenschaften
 - Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen und auf die Eigenschaften der Funktionen für die Fälle $c \cdot f(x)$; $f(x) + c$; $f(x + c)$; $f(c \cdot x)$
 - Nutzen der exponentiellen Regression unter Verwendung von Hilfsmitteln

Einblick gewinnen in periodische Prozesse

Anwenden der Sinusfunktion zum Beschreiben von periodischen Vorgängen

- Grad- und Bogenmaß
- Graph, Eigenschaften
- Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen und auf die Eigenschaften der Sinusfunktion für die Fälle $c \cdot f(x)$; $f(x) + c$; $f(x + c)$; $f(c \cdot x)$

unbeschränktes Wachstum (z. B. linear, exponentiell) und beschränktes Wachstum (z. B. logistisch)

globale Entwicklungsmodelle, Sparmodelle, Kernzerfall

⇒ [Bildung für nachhaltige Entwicklung](#)

$$y = a^x \text{ mit } a = \frac{1}{2}; 2; 10; e$$

→ [KI. 9, LB 1](#)

Ebbe und Flut, Sonnenaktivität, EKG

→ [PH, KI. 10, LB 1](#)

Ausblick auf gedämpfte Schwingung

Abbildung 9: Lehrplan Sachsen, Gymnasium, Fach Mathematik (2021), Klassenstufe 10, Lernbereich 1

#	MIA	K#	Qualifikationsebene Kompetenzrahmen	Handlungsebene
D1	A	5.2.4	Die Lernenden erarbeiten sich die Wirkung von Parametern bei verschiedenen Funktionen,	indem sie diese in einer interaktiven Simulation (GeoGebra) verändern und dann aufgrund der Veränderung des Graphen auf die Wirkungsweise dieser schließen.
D2	A	5.2.4	Die Lernenden verwenden ihr Tablet effizient und aufgabenbezogen,	indem sie ihre erarbeiteten Ergebnisse in einem Notes-Programm festhalten.
D3	A	5.5.3	Die Lernenden kennen und wenden Werkzeuge an,	indem sie GeoGebra nutzen, um die Wirkung der Parameter auf die Eigenschaften der Sinusfunktion zu bestimmen.
D4	M	3.1.1	Die Lernenden stellen ihre Ergebnisse der Klasse vor,	indem sie ihr Vorgehen und ihre Ergebnisse durch Screenshots oder Bildschirmspiegelung an der Tafel zeigen und diese erklären.
D5	M	6.1.3	Die Lernenden deuten die Verwendung von digitalen Tools als Bedeutsam für das Verständnis von Sachverhalten.	

Unterrichtsversuchsplanung

Legende		Unterrichtsmedium	Unterrichtswerkzeug	Unterrichtsgegenstand	
Zeit	Phase	Inhalt	SF/M ¹	Medien/Material	LZ Nr.
10'	Einstieg: Sinusfunktion als Beschreibung periodischer Vorgänge	Was ist die Sinusfunktion und wie sieht sie aus? Was kann damit beschrieben werden? (Ebbe und Flut) Wiederholung der Eigenschaften von Funktionen	FU UG	- Whiteboard, Smartboard	
5'	Aufgabenstellung	SuS sollen Eigenschaften der Sinusfunktion manuell in Partnerarbeit erarbeiten	FU LV	-Präsentation, Interaktive Tafel	
15'	Arbeitsphase	SuS untersuchen gegebene Funktion	PA SST	-Tablets, Notes-Programm	D2
10'	Auswertung	Vorstellung der Ergebnisse einer der Partnerarbeiten	FU UG	-Interaktive Tafel (Spiegelung des Bildschirms der Schüler)	
10'	Erweiterung	Lehrkraft führt die Parameterdarstellung und das Tool (GeoGebra) ein und erläutert diese	FU LV	-Interaktive Tafel, Präsentation, Tool (GeoGebra) auf Tafel zeigen	

1 SF – Sozialform (EA: Einzelarbeit, PA: Partnerarbeit, GA: Gruppenarbeit; FU: Frontalunterricht); M - Methode

5'	Aufgabenstellung	Die SuS sollen die Parameterfunktion in GeoGebra eingeben und die Parameter über Schieberegler verändern. Aus den daraus entstehenden Änderungen sollen die Lernenden die Wirkung der Parameter auf die Eigenschaften ableiten. (Wieder in Partnerarbeit)	FU LV	-Präsentation, Interaktive Tafel	
20'	Arbeitsphase	Die Lernenden erarbeiten sich jeweils zu zweit die Wirkung der Parameter auf die Eigenschaften der Funktion.	PA SST	-Tablets, GeoGebra, Notes-Programm (um Ergebnisse festzuhalten)	D1/D3
15'	Auswertung	Vorstellung und Ergänzung der Ergebnisse einer der Partnerarbeiten Wertung des Tools durch Schüler: -Welche Erkenntnisse wären ohne GeoGebra schwer oder gar nicht möglich gewesen? -Hat GeoGebra das Denken ersetzt oder unterstützt?	FU UG	-Interaktive Tafel (Spiegelung der Bildschirme der Schüler) -Präsentation	D5

Lösungsbilder der Arbeitsphasen

Lösungsbild Arbeitsphase 1:

Die **Eigenschaften der Sinusfunktion** umfassen:

- Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich: $y \in [-1, 1]$
- **Amplitude:** $A = 1$
- Nullstellen: $x_0 = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- Kleinste Periode: $p = 2\pi$

Lösungsbild Arbeitsphase 2:

Die **Eigenschaften der Sinusfunktion** mit Parametern umfassen:

- Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich: $y \in [d - |a|, d + |a|]$
- **Amplitude:** $A = |a|$
- Nullstellen: $x_0 = c + b / k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- Kleinste Periode: $p = 2\pi / |b|$

Simulation aus der zweiten Arbeitsphase

